# Lec 33 实数集连续性的五个等价命题

## 33.1 五个等价命题

1. **定理 33.1**

   确界存在原理: 有上 (下) 界的非空实数集 $E$ 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

2. **定理 33.2**

   单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.

3. **定理 33.3**

   闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 $\xi$, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

4. **定理 33.4**

   列紧性原理: 若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项, 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

5. **定理 33.5**

   柯西 (Cauchy) 准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

**证明**

$1 \Rightarrow 2$ 设 $a_n$ 单减且有下界 $m$, $a_n \geqslant m > m - \varepsilon, \forall n \in N^*$, 由确界存在原理, $E = \{a_n\}$ 有下确界, 记为 $a = \inf E$, 则 $a \geqslant m$, 且 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a - \varepsilon < a_n \leqslant a$, 即 $|a_n - a| < \varepsilon$. 由定义, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \inf\{a_n\}$.

$2 \Rightarrow 3$ 所有区间的左端点构成的数列 $\{a_n\}$ 是单调递增有上界的, 故有极限, 记为 $a$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 同理, 所有区间的右端点构成的数列 $\{b_n\}$ 是单调递减有下界的, 故有极限, 记为 $b$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 因此 $a - b = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 即 $a = b$. 即证存在 $\xi = a = b$. 若存在另一实数 $\eta \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$, 则 $\xi \leqslant \eta \leqslant \xi$, 即 $\xi = \eta$. 故唯一性得证.

$3 \Rightarrow 4$ 设 $|a_n| < M$, 取 $[\alpha_1, \beta_1] = [-M, M]$, 将其二分为 $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_1, \dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}] \cup [\dfrac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1]$, 两个子区间中至少有一个子区间包含无穷多个 $a_n$ 的项, 记为 $[\alpha_2, \beta_2]$, 重复上述过程, 得到 $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \dfrac{M - (-M)}{2^n} = 0$, 由闭区间套定理, 存在

唯一的实数 $\xi$, 使得 $\xi \in [\alpha_n, \beta_n], n = 1, 2, \cdots$.

然后构造收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 令 $n_1 = 1$, 由于区间 $[\alpha_2, \beta_2]$ 中包含无穷多个 $a_n$ 的项, 可以找到 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$, 以此类推, 可以找到 $n_3 > n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$, 重复此过程, 得到一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

$4 \Rightarrow 5$ 必要性是容易证明的, 因为 $\{a_n\}$ 收敛, 对于任意的一个正数 $\varepsilon$, 存在整数 $N$, 使得当 $m, n > N$ 时 $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, 因此就有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

下面证明充分性. 对于正数 $\varepsilon = 1$, 存在整数 $N_1$, 使得当 $m, n > N_1$ 时, 有 $|a_m - a_n| < 1$. 令

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|, |a_{N_1+1}|),$$

则有 $|a_n| \leq M, \quad n = 1, 2, \ldots$ 这说明 $\{a_n\}$ 是有界的. 由列紧性原理**??** 存在收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$. 因为 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对于任意意定的 $\varepsilon$, 存在整数 $N_2$, 使得当 $m, n > N_2$ 时, 有 $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于这个 $\varepsilon$, 因为 $\lim a_{n_k} = a$, 存在一个整数 $K$, 使得当 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; 特别取一个 $n_k$ 使得 $n_k > N_2$ 且 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

**例 33.1** 证明确界原理推连续性.

**证明** 由 $Y \neq \varnothing$, 故 $X$ 有上界, 由确界原理, $X$ 有上确界, 同理 $Y$ 有下确界, 记 $c_1 = \sup X, c_2 = \inf Y$, (目标: 找到 $c, s.t. \forall a \in X, b \in Y, a \leq c \leq b$)

1. 若 $c_1 \in X$ , 则取 $c = c_1$.
2. 若 $c_1 \notin X$, 则 $c_1 \in Y.c_2 \in Y \Rightarrow c = c_2; c_2 \notin Y \Rightarrow c_2 \in X, c_2 < c_1$ 这与 $\forall x \in X, y \in Y, x < y$ 矛盾.

Cauchy 收敛准则的强大之处在于, 它不要求事先猜出极限值. 也正是如此, 在我们说明一个数列发散的时候, 通常不利用极限定义的否定形式 (可以自行尝试一下这有多么繁琐), 而是利用 Cauchy 收敛准则的否命题.

**命题 33.1 (Cachuy 收敛准则的否命题)**

设数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 发散的充要条件是: 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall N \in N^*$, 存在 $n_0 > N$, 使得 $m, n > n_0$ 时, 有 $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon_0$.

## 33.2 例题

**例 33.2** 收敛的数列 $\{a_n\}$ 被称为 “Cauchy 列” 或 “基本列” .

1. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列;
2. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

**解**

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N^*$, 使 $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, 对 $\forall m > n > n_0$, 有
$|a_m - a_n| = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{m^2} < \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots + \dfrac{1}{(m-1)m} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$.
依 Cauchy 收敛准则, $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列.
2. 对 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, $\forall N \in N^*$, 取 $n > N, m = 2n$, 则 $m > n > N$, 而 $|a_m - a_n| = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2} = \varepsilon_0$, 故 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

✍ **作业** ex1.2:17(2)(3)(4),24;CH1:3(1),7,9,10(2),11.